УДК 620.171.3

Б.І. Ковальчук д-р техн. наук, проф., С.С. Зубков студ.
НТУ України «Київський політехнічний інститут» м.Київ, Україна

УЗАГАЛЬНЕНИЙ КРИТЕРІЙ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ З РІЗНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ НА РОЗТЯГ І СТИСК

Анализируются результаты теоретических и экспериментальных исследований предельного состояния конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Отмечены недостатки известных теорий. Рассмотрен новый критерий прочности хрупких изотропных материалов, обобщающий условия Писаренко-Лебедева и Кулона-Мора. Параметры, входящие в уравнение, определяются экспериментально при простых видах нагружения, например при растяжении, сжатии и кручении. Получено хорошее соответствие результатов расчета с экспериментальными данными

The results of theoretical and experimental investigations into the ultimate state of structural materials under combined stress-state are analyzed. The authors point out the disadvantages of known theories. New strength criterion for brittle isotropic materials is considered which generalizes the Pisarenko-Lebedyev and Coulomb-Mohr conditions. Parameters constituting equation are found by experimental determination under certain simple forms of loading, for example, by tension, compression and torsion. Good agreement of calculations with experimental data is shown.

Вступ

Для оцінки міцності матеріалів, що по-різному опираються розтягу і стиску, за складного напруженого стану запропоновано ряд критеріїв, яким відповідають в просторі напружень регулярні або сингулярні граничні поверхні $[1, 2]$. Експериментальна перевірка достовірності критеріїв показує $[3, 4]$, що існують певні обмеження у їх використанні щодо класів матеріалів, видів напруженого стану, температури тощо. У цьому відношенні перевагу мають узагальнені критерії міцності, наприклад критерій Писаренка-Лебедєва $[1]$, які видозмінюють граничну поверхню в залежності від властивостей матеріалу.

В роботі $[5]$ на основі аналізу механізму пластичної деформації полікристалічного агрегату був отриманий узагальнений критерій граничного стану пластичних матеріалів, окремими випадками якого є умови міцності Губера-Мізеса і Кулона-Треска. Критерій одержано на основі припущення, що початок макропластичної течії полікристалічного тіла визначається дією не тільки максимальних напружень зсуву, але і множини дотичних напружень, сприятливо орієнтованих до напрямку легкого ковзання хаотично розташованих кристалів. За міру дії цієї множини взята інтенсивність дотичних напружень τ_i, яка з точністю до коефіцієнта дорівнює середньоквадратичному значенню дотичних напружень, що діють на всіх площадках, що проходять через дану точку. Звідси зроблено припущення, що граничне значення максимальних дотичних напружень, при якому починається макропластична деформація матеріалу або його руйнування не є сталою величиною, а залежить від величини інтенсивності дотичних напружень. З врахуванням рівності $\tau_i = \sigma_i / \sqrt{3}$ (σ_i – інтенсивність напружень) ця залежність була представлена у вигляді

$$\tau_{\max} = m\sigma_i + n . \tag{1}$$

В результаті був отриманий критерій у вигляді

$$\eta_* \sigma_i + (1-\eta_*)(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_p , \tag{2}$$

де $\eta_* = (2-\varphi) / (2-\sqrt{3})$, $\varphi = \sigma_p / \tau_k$, σ_p, τ_k – граничні значення напружень (границі текучості або міцності) при розтягуванні і крученні.

Критерій добре узгоджується з результатами експериментальних досліджень пластичних матеріалів і дозволяє підвищити точність розрахунків на міцність.

Метою представленої роботи є узагальнення критерію (2) на матеріали з різними властивостями на розтяг і стиск.

Розробка критерію

Узагальнюючи теорію максимальних дотичних напружень на матеріали з різним опором розтягу і стиску, Кулон припустив $[1]$, що граничне значення максимального дотичного напруження є лінійною функцією нормального напруження в площині дії $\tau_{\max}$. В результаті був отриманий критерій міцності крихких матеріалів, який в головних напруженнях має вигляд

$$\sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_p\,, \tag{3}$$

де $\chi = \sigma_p / \sigma_c$, σ_p, σ_c – границі міцності при розтягу і стиску.

Ліва частина критерію може розглядатися як подвійне значення деякого зведеного максимального дотичного напруження.

Наслідуючи Кулона, введемо зведене дотичне напруження у вигляді

$$\tau_{зв} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \lambda\sigma_3)\,, \tag{4}$$

де λ – константа, що враховує співвідношення між границями міцності при розтягу, стиску і крученні.

Підставляючи в формулу (1) замість $\tau_{\max}$ зведене дотичне напруження згідно з виразом (4) і позначивши $2m = -a,\ 2n = b$, одержимо загальний вид критерію

$$a\sigma_i + \sigma_1 - \lambda\sigma_3 = b\,. \tag{5}$$

Константи матеріалу a, b, λ знайдемо з дослідів на розтяг, стиск і кручення.

У випадку одновісного розтягу ($\sigma_i = \sigma_1 = \sigma_p;\ \sigma_3 = 0$) рівняння (5) приймає вигляд

$$b = (1 + a)\sigma_p\,.$$

Підставляючи значення b в (5), і позначивши $\frac{a}{1+a} = \eta$, отримаємо

$$\eta\sigma_i + (1-\eta)(\sigma_1 - \lambda\sigma_3) = \sigma_p\,. \tag{6}$$

Записавши умову (6) для одновісного стиску ($\sigma_i = \sigma_c;\ \sigma_1 = 0;\ \sigma_3 = -\sigma_c$) і кручення ($\sigma_1 = \tau_k;\ \sigma_3 = -\tau_k;\ \sigma_i = \sqrt{3}\tau_k$)., отримаємо систему рівнянь:

$$\eta\sigma_c + (1-\eta)\lambda\sigma_c = \sigma_p;$$
$$\sqrt{3}\tau_k\eta + (1-\eta)(1+\lambda)\tau_k = \sigma_p.$$

Розв'язком системи буде:

$$\eta = \frac{\varphi - \chi - 1}{\sqrt{3} - 2};\ \lambda = \frac{\chi - \eta}{1 - \eta},\ \text{ де } \chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c};\ \varphi = \frac{\sigma_p}{\tau_k}.$$

Після підстановки значення. λ в рівняння (6) критерій міцності матеріалів, що по-різному опираються розтягу і стиску, прийме остаточний вигляд

$$\eta\sigma_i + (1-\eta)\sigma_1 - (\chi - \eta)\sigma_3 = \sigma_p \quad (\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3). \tag{7}$$

Аналіз критерію і його граничної поверхні

Для матеріалів з однаковими властивостями на розтяг і стиск ($\chi = 1$) критерій (7) зводиться до умови міцності (2).

При $\varphi = \chi + 1$ критерій (7) збігається з. рівнянням теорії Кулона-Мора (3).

При $\varphi = \left(\sqrt{3}-1\right)\chi + 1$ параметр $\eta = \chi$, в результаті умова міцності (7) зводиться до рівняння теорії Писаренка-Лебедєва

$$\chi\sigma_i + \left(1-\chi\right)\sigma_1 = \sigma_p .$$

Якщо $\chi = \dfrac{\sigma_p}{\sigma_c} \to 0$, $\varphi \to 1$ (ідеально крихкий матеріал), вираз (7) перетворюється в рівняння теорії максимальних нормальних напружень

$$\sigma_1 \le \sigma_p .$$

Отже, запропонована умова міцності є більш загальною у порівнянні з відомими критеріями, що широко використовуються в розрахунковій практиці.

Для аналізу геометрії граничної поверхні, що відповідає критерію (7), представимо його у вигляді функції

$$\sigma_i = f\left(\sigma_o, \mu_\sigma, m_i\right),$$

де $\sigma_o = \dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$ – середнє напруження; μ_σ – параметр виду девіатора напружень Лоде-Надаі; m_i – характеристики матеріалу.

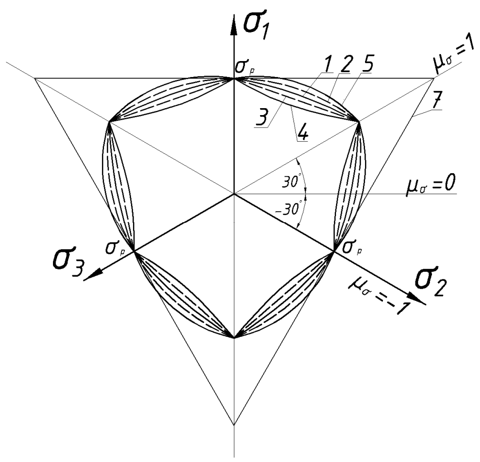


Рис. 1. Слід граничних поверхонь в площині $\sigma_o = \sigma_p/3$, які відповідають умові (7) при $\chi = 0,5$ та різних значеннях φ: $1 - \varphi = 1,43$; $2 - \varphi = 1,366$ (умова Писаренка-Лебедєва); $3 - \varphi = 1,5$ (умова Кулона-Мора); $4 - \varphi = 1,6$; $5 - \varphi = 1,3$; 7 – $\chi = 0,\ \varphi = 1$ (умова теорії максимальних нормальних напружень)

Як відомо [1], головні напруження виражаються через октаєдричні за допомогою співвідношень:

$$\sigma_1 = \sigma_{окт} - \frac{\mu_\sigma - 3}{\sqrt{2}\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}\tau_{окт};$$

$$\sigma_3 = \sigma_{окт} - \frac{\mu_\sigma + 3}{\sqrt{2}\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}\tau_{окт}.$$

Враховуючи, що

$\sigma_{окт} = \sigma_o$; $\tau_{окт} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sigma_i$, маємо:

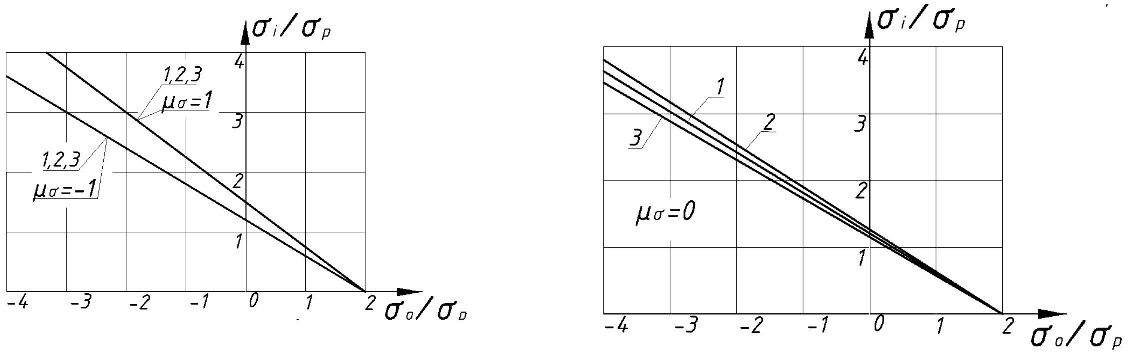
$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_o - \frac{\mu_\sigma - 3}{3\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}\sigma_i;\\ \sigma_3 &= \sigma_o - \frac{\mu_\sigma + 3}{3\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}\sigma_i;\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Підставляючи значення головних напружень (8) в рівняння (7), отримаємо критерій міцності у вигляді

$$\left(\eta + \frac{\left(\chi-1\right)\mu_\sigma + 3\left(\chi-1\right) - 6\eta}{3\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}\right)\sigma_i = \left(\chi-1\right)\sigma_o + \sigma_p$$

Оскільки гранична поверхня є симетричною відносно гідростатичної осі простору напружень, то її геометрію можна охарактеризувати двома перерізами: перерізом площиною, перпендикулярною до гідростатичної осі ($\sigma_0 = const$), і перерізом площиною, що проходить через гідростатичну вісь.

На рис.1 представлені поперечні перерізи граничних поверхонь, що відповідають критерію (7) за різних значень параметра φ, а на рис.2 – поздовжні перерізи поверхні при $\chi = 0,5$ і різних значеннях μ_σ і φ.



а *б*

Рис. 2. Поздовжні перерізи граничної поверхні при $\chi = 0,5$ **, значеннях параметра** $\mu_\sigma = 1; -1$ **(*а*),** $\mu_\sigma = 0$ **(*б*) і різних величинах** φ **:** $1 - \varphi = 1,43$; $2 - \varphi = 1,366$; (умова Писаренка-Лебедєва); $3 - \varphi = 1,5$ (умова Кулона-Мора)

Як видно з рисунків, критерій інтерпретується конічною поверхнею, вершина якої має координати

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_p}{1-\chi}.$$

Зі сторони гідростатичного стиску поверхня не замкнена, тобто в цій області міцність матеріалу не обмежується при будь-яких значеннях параметрів χ і φ.

Форма граничної кривої в площині $\sigma_0 = const$ залежить від співвідношення величин χ і φ (див.рис.1). У загальному випадку крива має форму рівностороннього криволінійного шестикутника. При $\varphi = \left(\sqrt{3}-1\right)\chi + 1$ вона набуває форми криволінійного трикутника (умова Писаренка-Лебедєва). Опуклість граничної поверхні забезпечується під час зміни параметра φ в межах $\left(\sqrt{3}-1\right)\chi + 1 \le \varphi \le \chi + 1$. Якщо значення параметра φ виходять за ці межі, спостерігається локальна вгнутість біля вершин шестикутника, або вгнутість його сторін.

Згідно з критерієм при $\mu_\sigma = const$ граничне значення інтенсивності напружень лінійно залежить від середнього напруження (див. рис. 2). Причому, при $\mu_\sigma = -1$ і $\mu_\sigma = 1$ граничні прямі, що відповідають різним значенням φ, збігаються, а при $\mu_\sigma = 0$ розходяться. Це розходження збільшується зі збільшенням гідростатичного стиску.

Як видно з рис.1 і 2, гранична поверхня, що відповідає запропонованому критерію (7), за умови її опуклості лежить між поверхнями Кулона-Мора і Писаренка-Лебедєва.

Слід зауважити, що критерії Кулона-Мора і Писаренка-Лебедєва передбачають однозначну, причому різну залежність границі міцності при крученні τ_k від границь міцності при розтягу σ_p і стиску σ_c. Так, при $\chi = 0,5$ різниця в значеннях τ_k, розрахованих за указаними критеріями, становить 10% і зі збільшенням χ зростає. В запропонованій умові міцності (7) така залежність між границями міцності відсутня, що дає можливість більш точно врахувати реальні властивості матеріалів. Критерій міцності (7) містить три характеристики матеріалу σ_p, σ_c і τ_k, які визначаються з дослідів на розтяг, стиск і кручення.

Оцінка достовірності критерію

На рис.3, запозиченого з монографії [1], наведені дані експериментальних досліджень міцності крихких матеріалів в умовах плоского напруженого стану. Досліди виконувалися шляхом навантаження трубчастих зразків осьовою силою і внутрішнім тиском. Розраховувалися осьові σ_z і тангенціальні σ_θ напруження, що відповідають руйнуванню зразків за різних видів напруженого стану.

Для першого квадранту площини напружень $\sigma_z \sim \sigma_\theta$ (двовісний розтяг) умова міцності (7) має вигляд

$$\eta\sqrt{\sigma_Z^2+\sigma_\theta^2-\sigma_Z\sigma_\theta}+(1-\eta)\sigma_*=\sigma_P,$$

де $\sigma_* = \sigma_z$ при $\sigma_z \ge \sigma_\theta$, $\sigma_* = \sigma_\theta$ при $\sigma_\theta \ge \sigma_z$.

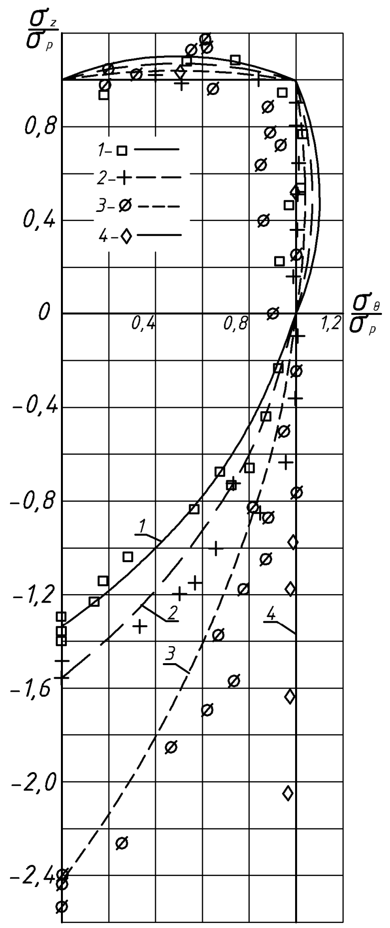


Рис. 3. Граничні криві міцності, побудовані за критерієм (7), і результати експериментальних досліджень крихких матеріалів в умовах плоского напруженого стану:
1–3–сірі чавуни різних марок; 4–гіпс

Для четвертого квадранту (розтяг зі стиском) умова міцності (7) запишеться

$$\eta\sqrt{\sigma_z^2+\sigma_\theta^2-\sigma_z\sigma_\theta}+(1-\eta)\sigma_\theta-(\chi-\eta)\sigma_z=\sigma_P$$

Відомо [3, 4], що результати експериментальних досліджень міцності крихких матеріалів характеризуються значним розсіюванням. Це стосується і дослідних даних, представлених на рис.3.Незважаючи на те, що поле розсіювання експериментальних точок значне, з рисунку можна зробити висновок, що криві міцності, розраховані за умовою (7), задовільно узгоджуються з даними експериментальних досліджень.

Висновок

Запропоновано узагальнений критерій міцності матеріалів з різним опором на розтяг і стиск, який враховує сукупний вплив на граничний стан матеріалів інтенсивності напружень, максимального дотичного і середнього нормального напружень. Параметри, .що містяться в умові міцності, знаходяться з трьох базових дослідів. Окремими випадками критерію є умови міцності Кулона-Мора і Писаренка-Лебедєва.

На відміну від відомих критеріїв запропонована умова описує міцність матеріалів з різними співвідношеннями між границями міцності при розтягу, стиску і крученні, що дає можливість більш повно врахувати їх механічні властивості і підвищити точність розрахунків на міцність..

Список літератури

1. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1976. – 416 с.
2. Гольденблат И.Н., Копнов В.А. Критерий прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
3. Lebedyev A.A., Kovalchuk B.I., Giginjak F.F., Lamashevsky V.P., Handbook of mechanical properties of structural materials at a complex stress state. – New Yorc: Begell House, Ins., Publishers., 2000. – 500 p.
4. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Изд. Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
5. Ковальчук Б.І., Зубков С.С. Про критерії граничного стану пластичних ізотропних матеріалів за складного напруженого стану // Вестник НТУУ "КПИ", Машиностроение. — К.: Изд-во ВИПОЛ, 2009 . — Вып. 57. — С. 28 – 33.